11-10-16

• Αρχή Καλής Διάταξης

Κάθε μη-κενό υποσύνολο $S \subseteq \mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο, δηλαδή $b \in S : b \leq x \ \forall \ x \in S$

Ένα τέτοιο b θα συμβολίζεται : $b = \min S$

• Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής

Έστω $S \subseteq \mathbb{N}$ και υποθέτουμε ότι ισχύουν τα εξής:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha)\ 1 \in S \\ \beta)\ \text{Αν } n \in \mathbb{N} \text{ και } n \in S \Rightarrow n+1 \in S \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{S = \mathbb{N}}$$

Θεώρημα: Η ΑΚΔ είναι ισοδύναμη με την ΑΜΕ

Με άλλα λόγια: ΑΚΔ $\Leftrightarrow$ ΑΜΕ

Απόδειξη: (ΑΚΔ) $\Rightarrow$ (ΑΜΕ). Έστω ότι $S \subseteq \mathbb{N}$ και υποθέτουμε ότι ισχύουν τα α, β της ΑΜΕ

α) $1 \in S$

β) $\forall\, n \in \mathbb{N} : n \in S \Rightarrow n+1 \in S$

ΘΔο: $S = \mathbb{N}$

Υποθέτουμε ότι $S \neq \mathbb{N}$. Τότε $\mathbb{N} \setminus S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S\}$

• $\mathbb{N} \setminus S \neq \emptyset$

Από την ΑΚΔ $\Rightarrow$ Το $\mathbb{N} \setminus S$ έχει ελάχιστο στοιχείο l

• $l \in \mathbb{N} \setminus S \Leftrightarrow l \notin S$

• $l \leq x \, , \, \forall \, x \in \mathbb{N} \setminus S$

Αν $\underline{l=1}$, τότε $1 \notin S$ και απ' το ⓐ έχουμε $1 \in S$

Άτοπο, άρα $l \neq 1$

• $l > 1 \Leftrightarrow l \geq 2$. Τότε, $1 \leq l-1 < l$ και τότε

$l-1 \notin \mathbb{N} \setminus S$, διότι αν ανήκε θα είχαμε

$l-1 \in \mathbb{N} \setminus S$
$l \in \mathbb{N} \setminus S$

Άρα, εφόσον $l-1 \notin \mathbb{N} \setminus S \Rightarrow l-1 \in S$

Από το ⓑ $\Rightarrow l \in S$: άτοπο διότι $l \notin S$

Η Υπόθεση $S \neq \mathbb{N}$ με χρήση της ΑΚΔ μας οδήγησε σε άτοπο

Άρα, $S = \mathbb{N}$. Επομένως, ισχύει η ΑΜΕ

• (ΑΜΕ) $\Rightarrow$ (ΑΚΑ)

Απόδειξη: Έστω ότι $S \subseteq \mathbb{N}$ και $S \neq \emptyset$

Θδο: Το S έχει ελάχιστο στοιχείο

Υποθέτουμε ότι το S δεν έχει ελάχιστο στοιχείο

Θεωρούμε το εξής σύνολο T

$T = \{n \in \mathbb{N} \mid 1, 2, \dots, n \notin S\}$

Το $1 \in T$, διότι αν δεν ανήκε, τότε $1 \in S$

Τότε προφανώς, θα είχαμε: $1 = \min S$.

Άτοπο, διότι από υπόθεση, το S δεν έχει ελάχιστο στοιχείο

• Έστω ότι $n \in T$. Τότε: $1, 2, \dots, n-1, n \notin S$

Ισχυρισμός: $n+1 \in T \Longleftrightarrow n+1 \notin S$

Πράγματι, αν $n+1 \in S$, τότε:

$$\left.\begin{array}{l} 1, 2, \dots, n \notin S \\ n+1 \in S \end{array}\right\} \Longrightarrow n+1 = \min S$$

Άτοπο, διότι από υπόθεση το S δεν έχει ελάχιστο στοιχείο

Επομένως, $n+1 \notin S \Rightarrow n+1 \in T$

Άρα, ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες της ΑΜΕ οπότε θα έχουμε : $T = N \Rightarrow S = \emptyset$

Άτοπο από υπόθεση. Άρα, το S έχει ελάχιστο στοιχείο επομένως ισχύει η ΑΚΔ.

• Πρόταση: Η ΑΜΕ είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη αρχή:

(ΑΜΕ)$_1$: Έστω $P(n)$: μια πρόταση η οποία εξαρτάται από φυσικούς αριθμούς και υποθέτουμε ότι :

α) $P(1)$: αληθής

β) Αν $n \in N$ και $P(n)$: αληθής $\Rightarrow P(n+1)$: αληθής

$\Rightarrow$

$\Rightarrow P(n)$: αληθής $\forall\, n \in N$

Απόδειξη : (ΑΜΕ) $\Rightarrow$ (ΑΜΕ)$_1$

$\forall\, n \in N$, η πρόταση $P(n)$ για την οποία ικανοποιούνται τα (α), (β) (της ΑΜΕ)

Θεωρούμε το σύνολο $S = \{ n \in N \mid P(n): \text{αληθής} \}$

Τότε το $1 \in S$, διότι $P(1)$: αληθής (από υπόθεση) (1)

Αν $n \in S \Rightarrow P(n)$: αληθής $\xrightarrow[\text{θεση}]{\text{από υπό-}}$ $P(n+1)$: αληθής

$\Rightarrow n+1 \in S$ (2). Από (1),(2) $\Rightarrow S = N \Rightarrow$ Η $P(n)$: αληθής $\forall n \in N$

Άρα, ισχύει η (ΑΜΕ)$_1$

Άσκηση : (ΑΜΕ)$_1 \Rightarrow$ (ΑΜΕ) !

Παράδειγμα: $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Να αποδειχθεί με χρήση της (ΑΜΕ)$_1$

Θέτουμε $P(n): 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in N$

$P(n)$: αληθής

- $P(1): 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$, αληθής
- Υποθέτουμε ότι ισχύει η $P(n): 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Δημιουργούμε το πρώτο μέλος της $P(n+1)$

$$1+2+\dots+n+n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Άρα, ισχύει η $P(n+1)$.

Προκύπτει από την (ΑΜΕ)$_1$ ότι $P(n)$: αληθής $\forall n \in N$